الرياضيات

6

التحليل (5)

12

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

تعرفنا بالمحاضرة السابقة على تكامل استيلجس وشروط وجوده أما في محاضرة اليوم سنكمل بنفس البحث وسوف نأخذ أهم خواصه طريقة حساب تكامل استيلجس والمعنى الهندسي للتكامل وأمثلة

خواص تكامل استيلجس:

$$\mathbf{1]}\quad \int_a^b d(g(x)) = g(b) - g(a)$$

$$\mathbf{2]}\quad \int_a^b \left(f_1(x) \mp f_2(x)\right) \cdot dg(x) = \int_a^b f_1(x) \cdot dg(x) \mp \int_a^b f_2(x) \cdot dg(x)$$

$$\mathbf{3]}\quad \int_a^b f(x) \cdot d\left(g_1(x) \mp g_2(x)\right) = \int_a^b f(x) \cdot dg_1(x) \mp \int_a^b f(x) \cdot dg_2(x)$$

$$\mathbf{4]}\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int_a^b \alpha f(x) \cdot d\left(\beta g(x)\right) = \alpha \cdot \beta \int_a^b f(x)\, d\left(g(x)\right)$$

1

5] إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ وكان التكاملان $\int_a^b f \cdot dg$, $\int_a^b h \cdot dg$ موجودين وكانت $f(x) \leq h(x)$ وذلك $\forall\, x \in [a\,,b]$ فإن $\int_a^b f \cdot dg \leq \int_a^b h \cdot dg$.

6] إذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ وكان $\int_a^b f \cdot dg$ موجوداً فإن التكاملات التالية موجودة:

$$a)\ \int_a^b |\boldsymbol{f(x)}| \cdot \boldsymbol{dg(x)}$$

$$b)\ \int_a^b \left(\boldsymbol{f(x)}\right)^2 \cdot \boldsymbol{dg(x)}$$

$$c)\ \left|\int_a^b f \cdot dg\right| \leq \int_a^b |f| \cdot dg$$

7] إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a\,,b]$ وكان التكامل $\int_a^b f \cdot dg$ موجوداً وكانت $a < c < b$

فإن التكاملين $\int_c^b f \cdot dg$, $\int_a^c f \cdot dg$ موجودان وتتحقق العلاقة:

$$\int_a^b f \cdot dg = \int_a^c f \cdot dg + \int_c^b f \cdot dg$$

سؤال: هل العكس صحيح دائماً؟

الجواب: العكس يتحقق بشرط إضافي مذكور في الخاصة التالية.

8] إذا كان التكاملان $\int_a^c f\cdot dg$, $\int_c^b f\cdot dg$ موجودين حيث $a<c<b$ وكان أحد التابعين g أو f مستمراً عند c والآخر محدوداً في جوار c عندئذٍ التكامل $\int_a^b f\cdot dg$ موجود وتتحقق العلاقة:

$$\int_a^c f\cdot dg+\int_c^b f\cdot dg=\int_a^b f\cdot dg$$

9] مبرهنة التكامل بالتجزئة:

إذا كان أحد التكاملين $\int_a^b f\cdot dg$ أو $\int_a^b g\cdot df$ موجوداً فإن الآخر يكون موجوداً.

وتتحقق العلاقة: (تعميم للتكامل بالتجزئة الذي عهدناه بمفهوم ريمان)

$$\int_a^b f\cdot dg+\int_a^b g\cdot df=[f(x)\cdot g(x)]_a^b=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)$$

10] إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن:

$$\left|\int_a^b f\cdot dg\right|\le \max_{a\le x\le b}|f(x)|\cdot V_a^b g$$

حساب تكامل استيلجس:

قبل البدأ في حساب التكامل نحتاج الى تمهيد:

تعريف الدالة الدرجية:

نقول عن دالة انها درجية اذا كانت مجموعة قيمها منتهية

$f: X\subset\mathbb{R}\to\{c_1,c_2,\dots,c_n\}$ (الدالة البسيطة)

أما بالتحليل 5 فإن تعريف الدالة الدرجية يعطى بالشكل:

إذا كانت $g(x)$ معرفة على $[a,b]$ وتعاني من انقطاعات منتهية من النوع الأول ولتكن $C_1,C_2,\dots,C_n$.

$$a<C_1<C_2<\cdots<C_n<b$$

فإذا كانت $g(x)$ دالة ثابتة في كل مجال مفتوح $]a,c_1[\,,]c_1,c_2[\,,\dots,]c_n,b[$

فإننا ندعو $g(x)$ دالة درجية.

مثال:

$[x]=\lfloor x\rfloor$ أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x.

$\lceil x\rceil$ أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي x.

وندعو $g_k = \lim\limits_{\substack{x \to C_k \\ >}} g(x) - \lim\limits_{\substack{x \to C_k \\ <}} g(x) = g(C_k+0) - g(C_k-0)$ القفزة عند C_k اذا كانت النقطة داخلية.

وعند الأطراف المجال: تكون القفزة من اليمين واليسار من الشكل:

عند a تكون القفزة $g_a = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} g(x) - g(a) = g(a+0) - g(a)$

عند b تكون القفزة $g_b = g(b) - \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} g(x) = g(b) - g(b-0)$

أمثلة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ 3 & ; x \in]1,4[\\ 6 & ; x \in [4,6[\\ 9 & ; x \in [6,10[\end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ 3 & ; x \in]1,4[\\ 5 & ; x = 4 \\ 6 & ; x \in]4,6[\\ 7 & ; x = 6 \\ 9 & ; x \in]6,10[\\ 10 & ; x = 10 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 5 & 0 \le x < 3 \\ 7 & 3 \le x < 10 \\ 10 & 10 \le x \le 15 \end{cases}$$

$$f(x) = [x] = \begin{cases} -3 & ; -3 \le x < -2 \\ -2 & ; -2 \le x < -1 \\ -1 & ; -1 \le x < 0 \\ 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; 1 \le x < 2 \\ 2 & ; 2 \le x < 3 \\ 3 & ; x = 3 \end{cases}$$

مبرهنة:

إذا كانت $g(x)$ دالة درجية معرفة على $[a,b]$ وكانت القفزات g_k عند C_k (نقاط الانقطاع) حيث

$$a < C_1 < C_2 < \cdots < C_n < b$$

وكانت f معرفة ومحدودة على $[a,b]$ بحيث لا تكون g , f غير مستمرتين معاً عند C_k من اليمين (أو من اليسار)،

عندئذٍ تكامل استيلجس يكون موجوداً ويعطى بالشكل:

$$\int_a^b f dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) g_k$$

وبشكل عام يعطى:

$$\int_a^b f dg = f(a)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(C_k)[g(C_k+0) - g(C_k-0)]$$
$$+ f(b)[g(b) - g(b-0)]$$
$$\Rightarrow \int_a^b f dg = f(a) g_a + \sum_{k=1}^{n} f(C_k) g_k + f(b) g_b$$

ملاحظة: لتطبيق المبرهنة السابقة لدينا

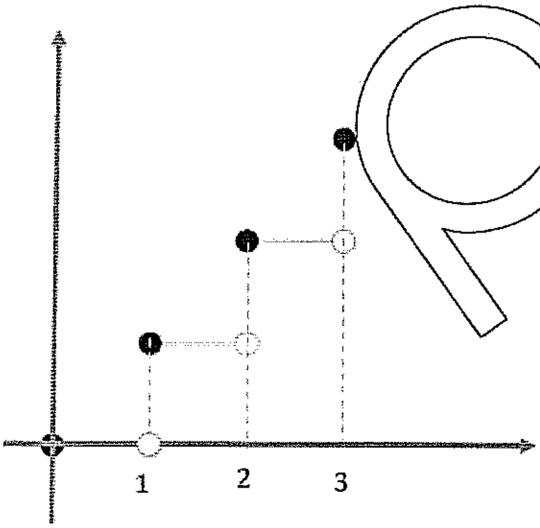
أولاً: دالة درجية

ثانياً: f معرفة ومحدودة على المجال المغلق $[a,b]$ ويكفي أن تكون إحدى الدالتين g,f مستمرة.

مثال:

اذا كان

$$f(x) = x^2, g(x) = [x] = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; 1 \le x < 2 \\ 2 & ; 2 \le x < 3 \\ 3 & ; x = 3 \end{cases}$$



لدينا ثلاث نقط انقطاع:

$$c_1 = 1 \;, \quad c_2 = 2 \;, \quad c_3 = 3 = b$$

فإن

$$I = (s) \int_0^3 x^2 d[x]$$
$$= f(1) g_1 + f(2) g_2 + f(3) g_3$$
$$= g_1 + 4 g_2 + 9 g_3 = 1 + 4 + 9 = 14$$
$$\underbrace{g_1}_{\text{قفزة}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} [x] - \lim_{x \overset{<}{\to} 1} [x] = 1 - 0 = 1$$

$$g_2 = \lim_{\substack{> \\ x \to 2}} [x] - \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} [x] = 2 - 1 = 1$$

$$g_3 = g(3) - g(3-0) = g(3) - \lim_{\substack{< \\ x \to 3}} [x] = 3 - 2 = 1$$

ملاحظة: اذا كانت $\boldsymbol{f}$ مستمرة على المجال المغلق $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ فلا داعي أن نقول أنها معرفة ومحدودة على $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على $[a, b]$ وكانت الدالة $g(x)$ تعاني من انقطاعات منتهية من النوع الأول وهي C_k حيث: $a < C_1 < C_2 \dots < C_n < b$

وكانت $g(x)$ كمولة حسب ريمان على $[a, b]$ واشتقاقية على $]a, c_1[\,,\,]c_1, c_2[\,, \dots ,\,]c_n, b[$ عندئذٍ تكامل ستيلجس يكون موجوداً ومعطى بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f dg = (R)\int_a^b f g' dx + f(a)[g(a+0) - g(a)]$$

$$+ \sum_{x=1}^{n} f(C_k).[g(C_k + 0) - g(C_k - 0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]$$

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.